Analytiske Undersøgelser

over

Primtalmængderne.

Af

L. Lorenz.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. V. 4.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1891.

I sin berømte Afhandling «über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse»[1]) har Riemann taget som Udgangspunkt den Euler'ske Ligning[2])

$$\Sigma n^r . \Pi(1 - p^r) = 1\,, \tag{1}$$

hvor Summen Σ omfatter alle hele Tal n, og Produktet Π alle Primtal p.

Fra dette Udgangspunkt fører Analysen ikke til den direkte Bestemmelse af Funktionen $\theta(x)$, Mængden af Primtal op til x (x inkl.), men nærmest til en anden Funktion $\vartheta(x)$, for hvilken Dr. J. P. Gram[3]) har indført Betegnelsen «Antallet af dividerede Primtalpotenser», og som er defineret ved Ligningen

$$\vartheta(x) = \theta(x) + \tfrac{1}{2}\,\theta(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}\,\theta(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots\,. \tag{2}$$

Det er denne Funktion, som Riemann har søgt at bestemme under analytisk Form. At man fra denne atter kan komme tilbage til Funktionen $\theta(x)$ er ogsaa paavist af Riemann, men det maa dog bemærkes, at enhver analytisk Fremstilling af $\vartheta(x)$ sandsynligvis altid, i Modsætning til den taltheoretiske exakte Bestemmelse, maa gaa ud fra den øvre uendelige Grænse for Talrækken og herfra til en approximeret Bestemmelse for de meget store Værdier af x, hvorved man da udelukker sig fra Bestemmelsen af $\vartheta(x)$ for de smaa Tals Vedkommende og saaledes fra Bestemmelsen af $\theta(x)$ ved Hjælp af $\vartheta(x)$. Denne sidste Funktion kan imidlertid ogsaa, ligesaa vel som selve Primtalmængden, fremstilles ved Tavler, dannede med Optællingen af Primtal som Grundlag, og det kan derfor ogsaa praktisk være tilstrækkeligt at bestemme $\vartheta(x)$.

Skjøndt Riemann's Bevis for den af ham udviklede analytiske Formel for $\vartheta(x)$ ikke kan godkjendes, er der dog resulteret det blivende Udbytte af hans Arbejde, at det fundne Udtryk for den aperiodiske Del af $\vartheta(x)$, nemlig Integrallogarithmen $Li(x)$, i det mindste inden for de Grænser, hvortil vi kjende Primtalmængden, har vist sig praktisk fuldkommen tilfredsstillende og alle andre tidligere ad empirisk Vej fremstillede Formler langt overlegen.

---

[1]) Monatsbericht d. K. Acad. d. W. zu Berlin, 3. Nov. 1859, S. 671.
[2]) Euler: Introductio in Analysin Infinitorum T. 1. p. 237. 1748.
[3]) Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, II. 6. S. 185.

Dette sidste har navnlig været paavist af Glaisher[1]) for hver 50000 indtil 9 Millioner og for 10 og 100 Millioner efter de af Meissel beregnede Primtalmængder[2]). Afvigelserne ere fremstillede grafisk, og for den Riemann'ske Formels Vedkommende viser Diagrammet en ligelig Fordeling af positive og negative Afvigelser. For de højere Tals Vedkommende synes disse Afvigelser at udvikle sig til efterhaanden mere og mere regelmæssige, lange Perioder.

Det maa herefter blive den naturlige Gang i den analytiske Undersøgelse over Primtalmængderne at vælge det samme Udgangspunkt som Riemann, nemlig den Euler'ske Ligning (1), fordi dette umiddelbart fører til Funktionen $\vartheta(x)$, hvis aperiodiske Del praktisk har vist sig at være af en simpel Form, at søge denne aperiodiske Del analytisk bestemt saa nøjagtig som muligt, og endelig at søge den periodiske Del af $\vartheta(x)$ saaledes bestemt ved Rækkeudvikling, at de Led, som ere af højeste Orden med Hensyn til x, fremtræde i første Række, for saaledes om muligt analytisk at paavise de ovenfor omtalte lange Perioder, som fremtræde ved de meget store Tal. Det er denne Gang i Undersøgelsen, jeg her har fulgt.

Vi ville begynde med en Udvikling af Formen

$$(2^r + 3^r + 4^r + \ldots)^s = \alpha^s(2)\, 2^r + \alpha^s(3)\, 3^r + \ldots\ \alpha^s(x)\, x^r + \ldots\ , \tag{3}$$

hvor r er en vilkaarlig Størrelse, s et helt Tal og $\alpha^s(x)$ en Koefficient, som vil angive Antallet af de forskjellige Maader, paa hvilke x kan dannes ved Multiplikation af s hele Tal, heri ikke medregnet Tallet 1.

Sættes endvidere

$$A^s(x) = \alpha^s(2) + \alpha^s(3) + \ldots .\ \alpha^s(x)\ , \tag{4}$$

med hvilket sidste Led Rækken slutter, vil man have

$$A^s(x) - A^s(x-1) = \alpha^s(x). \tag{5}$$

Ved at tage Logarithmen af den identiske Ligning (1) og benytte Rækkeudviklingen for $\log(1+y)$ efter stigende Potenser af y, uden Hensyn til Rækkens Konvergens, erholdes ligeledes identiske Udviklinger[3]), som for $r = 0$ føre til den bekjendte Ligning

$$\vartheta(x) = \frac{A^1(x)}{1} - \frac{A^2(x)}{2} + \frac{A^3(x)}{3} - \ldots . \tag{6}$$

---

[1]) James Glaisher: Factor Table for the sixth Million. London 1883.

[2]) Senere har Meissel i Mathm. Ann. Bd. 25, p. 251 beregnet Primtalmængden indtil 1000 Millioner. Hans Resultat (50 847 478) er kun 23 Enheder højere end det af Gram efter Riemann's Formel beregnede.

[3]) Jvf. Prof. Jul. Petersens Bemærkninger til Grams Afhandling. Vid. Selsk. Overs. 1884, S. 14.

Denne Række er endelig, da i Rækken (3) alle de første Koefficienter α^s forsvinde indtil $\alpha^s(2^s)$, og altsaa $A^s(x)$ ifølge (4) forsvinder for $x < 2^s$ eller $s > \frac{\log x}{\log 2}$. I Stedet for Størrelserne $A^s(x)$ ville vi dernæst indføre andre Størrelser $B^s(x)$, som falde bekvemmere for den følgende Beregning, og som fremkomme ved en lille Forandring af Udviklingen (3), idet vi sætte

$$(\tfrac{1}{2} + 2^r + 3^r + 4^r + \ldots)^s = \beta^s(1) + \beta^s(2)\,2^r + \beta^s(3)\,3^r + \ldots \beta^s(x)\,x^r + \ldots\,, \tag{7}$$

og

$$B^s(x) = \beta^s(1) + \beta^s(2) + \beta^s(3) + \ldots \beta^s(x). \tag{8}$$

Koefficienten $\beta^s(x)$ bliver da her ligeledes et Udtryk for Antallet af de forskjellige Maader, hvorpaa x kan dannes ved Multiplikation af s hele Tal, men hertil bliver nu at medregne Tallet 1 og paa en saadan Maade, at hvert Tilfælde, hvori 1 indgaar som Faktor, regnes halvt.

Man vil da have

$$A^s(x) = B^s(x) - \frac{s}{2} B^{s-1}(x) + \frac{s(s-1)}{2\,.\,4} B^{s-2}(x) - \ldots + (-1)^{s-1} \frac{s}{2^{s-1}} B^1(x) + \left(-\frac{1}{2}\right)^s, \tag{9}$$

og i Stedet for (6) vil man kunne danne en Udvikling af Formen

$$\vartheta(x) = -a_0 + a_1 \frac{B^1(x)}{1} - a_2 \frac{B^2(x)}{2} + \ldots \pm a_{s_1} \frac{B^{s_1}(x)}{s_1}\,, \quad s_1 > \frac{\log x}{\log 2} - 1\,, \tag{10}$$

idet Koefficienterne a ere bestemte ved

$$a_p = 1 + \frac{p}{2} + \frac{p(p+1)}{2\,.\,4} + \ldots \frac{p(p+1)\ldots(s_1-1)}{2\,.\,4\ldots(2s_1-2p)}\,, \quad p > 0\,, \tag{11}$$

$$a_0 = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{s_1}\cdot\frac{1}{2^{s_1}}\,. \tag{12}$$

Det bemærkes, at Tallet s_1 kan vælges vilkaarligt højere end $\frac{\log x}{\log 2}$ og kan sættes lig ∞, hvortil vilde svare $a_p = 2^p$, $a_0 = \log 2$. Men udskilles en enkelt Del af Funktionerne $\vartheta(x)$ og $B^s(x)$, er det selvfølgelig kun tilladt at sætte $s_1 = \infty$, naar den tilsvarende Række for denne Værdi af s_1 bliver konvergent.

Som Grundlag for mine Undersøgelser har jeg først valgt den Poisson'ske Summationsformel, hvorefter man har exakt

$$\tfrac{1}{2} + 2^r + 3^r + \ldots x^r = \int_1^{x+\frac{1}{2}} dx_1 x_1^r (1 + 2\,\Sigma \cos 2\pi m_1 x_1)\,, \quad m_1 = 1,\ 2, \ldots \infty\,. \tag{13}$$

Med en passende Bestemmelse af Integralernes Grænser vil man ogsaa kunne udtrykke denne Række ophøjet i Potensen s ved det s-dobbelte Integral

$$\int dx_1 x_1^r (1 + 2\,\Sigma \cos 2\pi m_1 x_1) \int dx_2 x_2^r (1 + 2\,\Sigma \cos 2\pi m_2 x_2) \ldots \int dx_s x_s^r (1 + 2\,\Sigma \cos 2\pi m_s x_s)\,,$$

hvor m_1, m_2, $\ldots m_s$ i alle Summerne gjennemløbe Talrækken 1, 2, $\ldots \infty$.

Heri indføres de nye Variable

$$u_1 = x_1 x_2 \ldots x_s, \quad u_2 = x_2 x_3 \ldots x_s, \quad u_{s-1} = x_{s-1} x_s, \quad u_s = x_s.$$

Da den lavere Grænse for alle de Variable x er 1, bliver dette ogsaa den lavere Grænse for de nye Variable. Den øvre Grænse for $u_s = \frac{u_{s-1}}{x_{s-1}}$ bliver u_{s-1}, for u_{s-1} tilsvarende u_{s-2} og saaledes videre indtil u_1, hvis øvre Grænse vi ville betegne ved u. Endvidere er $dx_s = du_s$, $dx_{s-1} = \frac{du_{s-1}}{u_s}$, $dx_{s-2} = \frac{du_{s-2}}{u_{s-1}}$, $\ldots\ dx_1 = \frac{du_1}{u_2}$.

Paa denne Maade kan man altsaa gjengive Udviklingen (7) ved et s-dobbelt Integral, og det vil ses, at man nu ogsaa kan afbryde Udviklingen med $\beta^s(x) x^r$ som sidste Led ved at sætte Grænsen

$$u = x + \tfrac{1}{2}.$$

Sættes dernæst $r = 0$, vil man erholde

$$B^s(x) = \int_1^u du_1 \int_1^{u_1} \frac{du_2}{u_2} \ldots \int_1^{u_{s-1}} \frac{du_s}{u_s} \left(1 + 2\,\Sigma \cos \mu_1 \frac{u_1}{u_2}\right) \ldots \left(1 + 2\,\Sigma \cos \mu_{s-1} \frac{u_{s-1}}{u_s}\right) \left(1 + 2\,\Sigma \cos \mu_s u_s\right), \quad (14)$$

hvor for Kortheds Skyld er sat

$$2\pi m_1 = \mu_1, \quad 2\pi m_2 = \mu_2, \quad \ldots\ 2\pi m_s = \mu_s.$$

Ligesom i det enkelte Integral (13) alle Elementer forsvinde, naar x_1 ikke er et helt Tal, saaledes ville ogsaa i dette s-dobbelte Integral alle Elementer forsvinde undtagen i de Tilfælde, at samtlige Brøker

$$\frac{u_1}{u_2}, \quad \frac{u_2}{u_3}, \quad \ldots \quad \frac{u_{s-1}}{u_s}, \quad \frac{u_s}{1}$$

ere hele Tal.

Idet Multiplikationen af de i Integralet indgaaende indklamrede Faktorer udføres, kunne vi ordne Produktet efter Antallet af de indgaaende Summationstegn, og det lader sig da vise, at alle de Integraler, som indeholde det samme Antal Summationstegn, blive ligestore. Lad nemlig f, g og h betegne hvilke som helst Funktioner, vil man kunne bevise Sætningen

$$\int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} f\left(\frac{u_{p-1}}{u_p}\right) \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} g\left(\frac{u_p}{u_{p+1}}\right) h(u_{p+1}) = \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} g\left(\frac{u_{p-1}}{u_p}\right) \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} f\left(\frac{u_p}{u_{p+1}}\right) h(u_{p+1}), \quad (15)$$

hvor f og g have byttet Plads. Det første Udtryk gaar ved at indsætte $\frac{u_p}{u_{p+1}}$ i Stedet for u_{p+1} over til

$$\int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} f\left(\frac{u_{p-1}}{u_p}\right) \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} g(u_{p+1})\, h\left(\frac{u_p}{u_{p+1}}\right).$$

Indføres endvidere Betegnelsen

$$\psi(u,\; u_{p+1}) = \int \frac{du}{u} f\left(\frac{u_{p-1}}{u}\right) h\left(\frac{u}{u_{p+1}}\right),$$

vil ovenstaaende Integral kunne udtrykkes ved

$$\int_1^{u_{p-1}} du_p \left[\frac{d}{du_p}\int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} g(u_{p+1})\,\psi(u_p,\; u_{p+1}) - \frac{1}{u_p} g(u_p)\,\psi(u_p,\; u_p)\right]$$

$$= \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} g(u_{p+1})\,\psi(u_{p-1},\; u_{p+1}) - \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} g(u_p)\,\psi(u_p,\; u_p),$$

hvor man i det første Integral kan sætte u_p for u_{p+1}. De to Integraler kunne dernæst sammenfattes til det enkelte

$$\int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} g(u_p)\left(\psi(u_{p-1},\; u_p) - \psi(u_p,\; u_p)\right) = \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} g(u_p) \int_{u_p}^{u_{p-1}} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} f\left(\frac{u_{p-1}}{u_{p+1}}\right) h\left(\frac{u_{p+1}}{u_p}\right),$$

og sættes heri først $\frac{u_{p-1}}{u_p}$ i Stedet for u_p og dernæst $\frac{u_{p-1}}{u_p} u_{p+1}$ i Stedet for u_{p+1}, bliver Udtrykket identisk med højre Side af Ligning (15), hvorved denne Lignings Rigtighed er bevist.

Gaa vi nu tilbage til det omhandlede Produkt og udtage af den hele Sum af Integraler et enkelt, som indeholder $\Sigma \cos \mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}}$, men derimod ikke $\Sigma \cos \mu_{p-1} \frac{u_{p-1}}{u_p}$, ville vi kunne sætte

$$\ldots \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} \Sigma \cos \mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}} \ldots = \ldots \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} \Sigma \cos \mu_{p-1} \frac{u_{p-1}}{u_p} \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} \ldots .$$

Paa denne Maade kunne alle Summerne Σ flyttes fra højre til venstre med tilsvarende Forandring af Indices, hvorved alle de Integraler, hvori Antallet af Summationstegn er det samme, blive identiske.

De Integraler, som indeholde et Antal af p Summationstegn, erholde saaledes Formen

$$\int_1^{u} du_1 \int_1^{u_1} \frac{du_2}{u_2} 2\,\Sigma \cos \mu_1 \frac{u_1}{u_2} \ldots \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2\,\Sigma \cos \mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}} \int_1^{u_{p+1}} \frac{du_{p+2}}{u_{p+2}} \ldots \int_1^{u_{s-1}} \frac{du_s}{u_s}.$$

Betegnes dette Udtryk ved X_p^s og udføres de sidste Integrationer, vil man for $p < s$ erholde

$$X_p^s = \int_1^u du_1 \int_1^{u_1} \frac{du_2}{u_2} 2\,\Sigma \cos \mu_1 \frac{u_1}{u_2} \ldots \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2\,\Sigma \cos \mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}} \cdot \frac{(\log u_{p+1})^{s-p-1}}{[s-p-1]} . \tag{16}$$

Har man $p = s$, sættes først $\int_1^u du_1 = u \int_1^u \frac{du_1}{u_1} \cdot \frac{u_1}{u}$, hvorefter $\frac{u_1}{u}$ kan ombyttes med det følgende Summationstegn med Forandring af Indices og saaledes videre. Det sidste Integral bliver

$$\int_1^{u_{s-1}} \frac{du_s}{u_{s-1}} 2\,\Sigma \cos \mu_s u_s = 2\,\Sigma \frac{\sin \mu_s u_{s-1}}{\mu_s u_{s-1}} ,$$

og hele Udtrykket faar Formen

$$X_s^s = u \int_1^u \frac{du_1}{u_1} 2\,\Sigma \cos \mu_1 \frac{u}{u_1} \ldots \int_1^{u_{s-2}} \frac{du_{s-1}}{u_{s-1}} 2\,\Sigma \cos \mu_{s-1} \frac{u_{s-2}}{u_{s-1}} \cdot 2\,\Sigma \frac{\sin \mu_s u_{s-1}}{\mu_s u_{s-1}} . \tag{17}$$

Med disse Værdier af X_p^s og X_s^s vil Ligningen (14) gaa over til

$$B^s(x) = X_0^s + \frac{s}{1} X_1^s + \frac{s(s-1)}{1\,.\,2} X_2^s + \ldots \frac{s}{1} X_{s-1}^s + X_s^s . \tag{18}$$

Det bliver nu først Opgaven at bestemme den aperiodiske Del af $B^s(x)$, som jeg vil betegne ved $\overline{B}^s(x)$, ligesom ogsaa i det følgende gjennemgaaende den aperiodiske Del af en Funktion vil blive betegnet ved en Streg over Funktionsmærket.

Det sidste i (16) indgaaende Integral er

$$\int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2\,\Sigma \cos \mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}} \cdot \frac{(\log u_{p+1})^{s-p-1}}{[s-p-1]} = \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2\,\Sigma \cos \mu_p u_{p+1} \frac{(\log u_p - \log u_{p+1})^{s-p-1}}{[s-p-1]} .$$

Opløses nu det sidste Integral i de to Integraler

$$\int_1^{\infty} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2\,\Sigma \cos \mu_p u_{p+1} \frac{(\log u_p - \log u_{p+1})^{s-p-1}}{[s-p-1]} - \int_{u_p}^{\infty} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2\,\Sigma \cos \mu_p u_{p+1} \frac{(\log u_p - \log u_{p+1})^{s-p-1}}{[s-p-1]} ,$$

vil det første af disse kunne betragtes som den aperiodiske Del, det andet som den periodiske Del af Integralet. Det første Integral vil kunne gives Formen

$$C_0 \frac{(\log u_p)^{s-p-1}}{[s-p-1]} + C_1 \frac{(\log u_p)^{s-p-2}}{[s-p-2]} + C_2 \frac{(\log u_p)^{s-p-3}}{[s-p-3]} + \ldots ,$$

idet Konstanterne C_n indføres, definerede ved Ligningen

$$C_n = \frac{(-1)^n}{[n]} \int_1^{\infty} \frac{du}{u} (\log u)^n 2\,\Sigma \cos \mu u , \tag{19}$$

hvoraf findes

$$
\begin{aligned}
C_0 &= 0{,}07721\ldots\\
C_1 &= 0{,}07281\ldots\\
C_2 &= -0{,}00484\ldots\\
C_3 &= -0{,}00034\ldots\\
C_4 &= 0{,}00009\ldots\;.
\end{aligned}
$$

Sættes endvidere for Kortheds Skyld

$$C_0 \frac{d}{d\log u} + C_1 \frac{d^2}{(d\log u)^2} + C_2 \frac{d^3}{(d\log u)^3} + \ldots = \Delta_{\log u}\,, \tag{20}$$

vil man kunne give den aperiodiske Del af det sidste Integral i (16) Formen

$$\Delta_{\log u_p} \frac{(\log u_p)^{s-p}}{[s-p]}\,.$$

Indføres dette Udtryk i (16), vil nu det sidste Integral blive

$$\int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} 2\,\Sigma\cos\mu_{p-1}\frac{u_{p-1}}{u_p}\cdot\Delta_{\log u_p}\frac{(\log u_p)^{s-p}}{[s-p]} = \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} 2\,\Sigma\cos\mu_{p-1}u^p\cdot\Delta_{\log u_{p-1}}\frac{(\log u_{p-1}-\log u_p)^{s-p}}{[s-p]}\,,$$

hvoraf ganske ligesom ovenfor den aperiodiske Del findes bestemt ved

$$\Delta_{\log u_{p-1}}\,\Delta_{\log u_{p-1}}\frac{(\log u_{p-1})^{s-p+1}}{[s-p+1]} = \Delta^2_{\log u_{p-1}}\frac{(\log u_{p-1})^{s-p+1}}{[s-p+1]}\,.$$

Paa denne Maade ses nu let, at den aperiodiske Del af (16) lader sig udtrykke ved

$$\overline{X}^s_p = \int_1^u du_1\,\Delta^p_{\log u_1}\frac{(\log u_1)^{s-1}}{[s-1]}\,, \tag{21}$$

hvorved hele den aperiodiske Del af (18) lader sig bestemme under de symbolske Former

$$\overline{B}^s_{(x)} = \int_1^u du_1\,(1+\Delta_{\log u_1})^s\frac{(\log u_1)^{s-1}}{[s-1]} = \int_0^{\log u} dv\,e^v(1+\Delta_v)^s\frac{v^{s-1}}{[s-1]}\,. \tag{22}$$

Saalænge vi befinde os inden for saadanne Grænser for x, hvortil Optællingen eller den exakte Beregning af Primtalmængden hidtil er naaet, hvilke Grænser ere henholdsvis ved $\log x = 16$ og $\log x = 21$, vil det ikke være uoverkommeligt at bestemme den aperiodiske Del af $\vartheta(x)$ ved Indsættelsen af dette Udtryk for $\overline{B}^s_{(x)}$ i Ligningen (10), idet man vælger s_1 lig det største hele Tal i $\frac{\log x}{\log 2}$. Resultatet vil neppe kunne fremstilles under en væsentlig simplere Form, saalænge man vil medtage alle de i Δ_v indgaaende Konstanter C_n, men indskrænker man sig til kun at medtage den første af disse, C_0, vil Rækken (10) blive konvergent for $s_1 = \infty$, og Summationen kan da let udføres. Man vil nemlig for $s_1 = \infty$ og $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, ... have

$$\overline{\vartheta}(x) = -\log 2 + \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}2^s\int_0^{\log u} d\,v\,e^v\left(1 + C_0\frac{d}{dv}\right)^s\frac{v^{s-1}}{[s]}$$

$$= -\log 2 + \int_0^{\log u} d\,v\,e^v\left[\frac{1}{v} - \frac{e^{-2v}}{v} + \frac{2\,C_0}{[1]}\frac{d}{dv}v\frac{e^{-2v}}{v} - \frac{2^2\,C_0^2}{[2]}\frac{d^2}{dv^2}v^2\frac{e^{-2v}}{v} + \ldots\right],$$

hvorefter Summationen, udført ved Lagranges Række, giver

$$\overline{\vartheta}(x) = -\log 2 + \int_0^{\log u} d\,v\,e^v\left(\frac{1}{v} - \frac{e^{-\frac{2v}{1+2C_0}}}{v}\right) = -\log 2 + Li(u) - Li\left(u^{-\frac{1-2C_0}{1+2C_0}}\right). \qquad (23)$$

Heri er $\frac{1-2\,C_0}{1+2\,C_0} = 0{,}73245\ldots$, og det ses saaledes, at det fundne Udtryk for større Værdier af x ikke er væsentlig forskjelligt fra Integrallogarithmen af x, ligesom det heller ingen væsentlig Forskjel havde gjort, om man ogsaa havde sat $C_0 = 0$. I dette Tilfælde vilde Resultatet erholde den simple Form

$$\overline{\vartheta}(x) = -\log 2 + \int_{-\log u}^{\log u}\frac{dv}{v}e^v.$$

Praktisk ere disse Resultater saaledes i god Overensstemmelse med det Riemann'ske.

Den periodiske Del af X_p^s viser sig for $p < s$ kun at have en underordnet Betydning i Sammenligning med X_s^s, og da den første tillige lader sig aflede af denne sidste, vil jeg i det følgende indskrænke mig til Behandlingen alene af Funktionen X_s^s, saaledes som denne er bestemt ved Ligningen (17).

Vi ville først betragte Tilfældet $s = 2$, nemlig

$$X_2^2 = u\int_1^u\frac{du_1}{u_1}2\,\Sigma\cos\mu_1\frac{u}{u_1}\cdot 2\,\Sigma\frac{\sin\mu_2 u_1}{\mu_2 u_1},$$

som ved delvis Integration omdannes til

$$X_2^2 = \int_1^u du_1 2\,\Sigma\frac{\sin\mu_1\frac{u}{u_1}}{\mu_1}\cdot 2\,\Sigma\cos\mu_2 u_1 = 2\,\Sigma\Sigma\int_1^u\frac{du_1}{\mu_1}\left(\sin\left(\mu_1\frac{u}{u_1} + \mu_2 u_1\right) + \sin\left(\mu_1\frac{u}{u_1} - \mu_2 u_2\right)\right).$$

Heri sættes

$$\mu_1\frac{u}{u_1} + \mu_2 u_1 = 2\,v\sqrt{\mu_1\mu_2 u}, \quad \mu_1\frac{u}{u_1} - \mu_2 u_1 = 2\,v'\sqrt{\mu_1\mu_2 u},$$

hvoraf erholdes

$$u_1\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 u}} = v \pm \sqrt{v^2 - 1} = -v' + \sqrt{v'^2 + 1}.$$

v har et Minimum for $v = 1$, og Betingelsen for, at dette Punkt falder indenfor Integralets Grænser, er

$$1 < \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}} < u,$$

hvilken Betingelse ogsaa kan udtrykkes ved, at baade μ_1 og μ_2 skulle være mindre end $\sqrt{\mu_1\mu_2 u}$. Med voxende u_1 gaar Fortegnet for $\sqrt{v^2-1}$ i Minimalpunktet over fra — til $+$. Falder Minimalpunktet under Integralets lavere Grænse ($\mu_1 u < \mu_2$), maa Fortegnet indenfor Integralet regnes positivt, og modsat, naar Minimalpunktet ligger over Integralets øvre Grænse ($\mu_1 > \mu_2 u$).

Sættes for Kortheds Skyld

$$2\sqrt{\mu_1\mu_2 u} = a, \quad \mu_1 u + \mu_2 = a v_0, \quad \mu_1 + \mu_2 u = a v_1,$$
$$\mu_1 u - \mu_2 = a v_0, \quad \mu_1 - \mu_2 u = a v_1',$$

erholdes saaledes

$$X_2^2 = \Sigma\Sigma \frac{4u}{a}\left[\int_{v_0}^{v_1} dv\left(1 \pm \frac{v}{\sqrt{v^2-1}}\right)\sin av + \int_{v_0'}^{v_1'} dv'\left(-1 + \frac{v'}{\sqrt{v'^2+1}}\right)\sin av'\right].$$

Heri er

$$\Sigma\Sigma\frac{4u}{a}\left(\int_{v_0}^{v_1} dv \sin av - \int_{v_0'}^{v_1'} dv' \sin av'\right) = 2\,\Sigma\Sigma\frac{\sin\mu_1 \sin\mu_2 u - \sin\mu_1 u \sin\mu_2}{\mu_1\mu_2},$$

som er 0, da de to Udtryk blive identiske ved Ombytning af Indices.

Vi have altsaa alene tilbage

$$X_2^2 = \Sigma\Sigma\frac{4u}{a}\left[\int_{v^0}^{v_1} dv\left(\pm\frac{v}{\sqrt{v^2-1}}\right)\sin av + \int_{v_0'}^{v_1'} dv'\frac{v'}{\sqrt{v'^1+1}}\sin av'\right],$$

hvor det dobbelte Fortegn bestemmes af Minimalpunktets Beliggenhed paa den Maade, som ovenfor er angivet.

Først betragtes Integralet

$$\int\frac{dz\,z}{\sqrt{z^2-1}}e^{azi}$$

med den komplexe Variable $z = v + wi$. Udstrækkes Integrationen over en sluttet Kreds, bliver dette Integral Nul, hvorfor vi, naar Integrationen udføres henad en Rektangel, hvis Vinkelspidser ligge i Punkterne 1, v_0, $v_0 + \infty i$, $1 + \infty i$, erholde

$$0 = \int_1^{v_0}\frac{dv\,v}{\sqrt{v^2-1}}e^{vai} + i\int_0^\infty\frac{dw\,(v_0+wi)}{\sqrt{(v_0+wi)^2-1}}e^{a(v_0+wi)i} - i\int_0^\infty\frac{dw\,(1+wi)}{\sqrt{(1+wi)^2-1}}e^{a(1+wi)i}.$$

De to sidste Integraler kunne udvikles efter aftagende Potenser af a i semikonvergente Rækker, hvoraf vi dog, for at begrænse Regningen, saavel her som i det følgende kun medtage de Led, som i det endelige Resultat, Udtrykket for X_2^2, ikke forsvinde for $u = \infty$. Saaledes erholdes:

$$0 = \int_1^{v_0} \frac{dv\, v}{\sqrt{v^2-1}}\, e^{avi} + \frac{i v_0\, e^{a v_0 i}}{a\sqrt{v_0^2-1}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{\left(a+\frac{\pi}{4}\right)i},$$

hvoraf følger

$$\int_1^{v_0} \frac{dv v}{\sqrt{v^2-1}} \sin av = -\frac{v_0 \cos a v_0}{a\sqrt{v_0^2-1}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right).$$

Her er v_0 antaget større end 1. I Tilfælde af, at man netop har $v_0 = 1$, bliver selvfølgelig Integralet lig 0. Den tilsvarende Ligning erholdes ved Forandring af v_0 til v_1.

Hvis nu Minimalpunktet ligger i n d e n f o r Integralets Grænser, saa har man

$$1 < \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}} < u,$$

$$a\sqrt{v_0^2-1} = \mu_1 u - \mu_2 = a v_0', \quad a\sqrt{v_1^2-1} = \mu_2 u - \mu_1 = -a v_1',$$

$$\int_{v_0}^{v_1} dv\left(\pm\frac{v}{\sqrt{v^2-1}}\right) \sin av = -\int_{v_0}^{1} \frac{dv\, v}{\sqrt{v^2-1}} \sin av + \int_1^{v_1} \frac{dv\, v}{\sqrt{v^2-1}} \sin av.$$

Ifølge den ovenfor fundne Ligning er altsaa i dette Tilfælde

$$\int_{v_0}^{v_1} dv\left(\pm\frac{v}{\sqrt{v^2-1}}\right) \sin av = -\frac{v_0 \cos a v_0}{a v_0'} + \frac{v_1 \cos a v_1}{a v_1'} + \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right),$$

medens dette Integral for $v_0 = 1$ gaar over til

$$\frac{v_1 \cos a v_1}{a v_1'} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right),$$

og for $v_1 = 1$ til

$$-\frac{v_0 \cos a v_1}{a v_0'} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right).$$

Hvis Minimalpunktet ligger n e d e n f o r Integralets lavere Grænse, har man

$$\mu_1 u < \mu_2, \quad \sqrt{v_0^2-1} = -v_0', \quad \sqrt{v_1^2-1} = -v_1',$$

$$\int_{v_0}^{v_1} dv\left(\pm\frac{v}{\sqrt{v^2-1}}\right) \sin av = -\frac{v_0 \cos av}{a v_0'} + \frac{v_1 \cos a v_1}{a v_1'},$$

og hvis Minimalpunktet ligger o v e n f o r Integralets øvre Grænse, erholdes

$$\mu_1 > \mu_2 u, \quad \sqrt{v_0^2 - 1} = v_0', \quad \sqrt{v_1^2 - 1} = v_1',$$

$$\int_{v_0}^{v_1} dv \left(\pm \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}} \right) \sin av = - \frac{v_0 \cos av}{av_0'} + \frac{v_1 \cos av_1}{av_1'}.$$

Føjer man hertil, at man i alle Tilfælde har

$$\int_{v_0'}^{v_1'} \frac{dv\, v}{\sqrt{v^2 + 1}} \sin av = \frac{v_0' \cos av_0'}{av_0} - \frac{v_1' \cos av_1'}{av_1},$$

saa ses det, at X_2^2 vil kunne udtrykkes ved

$$X_2^2 = S_1 \frac{4u}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} S_2 \frac{4u}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a + \frac{\pi}{a}\right)$$
$$+ S_3 \frac{4u}{a^2} \left[- \frac{v_0 \cos av_0}{v_0'} + \frac{v_1 \cos av_1}{v_1'} + \frac{v_0' \cos av_0'}{v_0} - \frac{v_1' \cos av_1'}{v_1} \right],$$

idet S_1, S_2 og S_3 betegne tre Dobbeltsummer med Hensyn til m_1 og m_2, saaledes at i S_1 og S_2 Produktet $m_1 m_2$ gjennemløber hele Talrækken fra 1 til ∞, medens enhver af Faktorerne m_1 og m_2 i S_1 kun gjennemløber Rækken af Tal som ere mindre end $\sqrt{m_1 m_2 u}$, i S_2 Rækken, som netop svarer til $m_1 = \sqrt{m_1 m_2 u}$ og $m_2 = \sqrt{m_1 m_2 u}$. I Dobbeltsummen S_3 gjennemløber m_1 og m_2 alle hele Tal fra 1 til ∞ med Undtagelse af de Værdier, som svare til $m_1 = \sqrt{m_1 m_2 u}$ og $m_2 = \sqrt{m_1 m_2 u}$.

Denne sidste Dobbeltsum deler sig ved Indsættelsen af de givne Værdier for a, v_0, v_1, v_0', v_1' i de to Summer

$$S_3 \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \left(- \frac{\mu_1 u + \mu_2}{\mu_1 u - \mu_2} \cos(\mu_1 u + \mu_2) + \frac{\mu_1 u - \mu_2}{\mu_1 u + \mu_2} \cos(\mu_1 u - \mu_2) \right)$$
$$+ S_3 \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \left(\frac{\mu_1 + \mu_2 u}{\mu_1 - \mu_2 u} \cos(\mu_1 + \mu_2 u) - \frac{\mu_1 - \mu_2 u}{\mu_1 + \mu_2 u} \cos(\mu_1 - \mu_2 u) \right),$$

som ved Ombytning af Indices ses at være ligestore. Ved heri at sætte $\mu_1 = 2\pi m_1$, $\mu_2 = 2\pi m_2$, $u = x + \frac{1}{2}$, reduceres de to Summer tilsammen til

$$- S_3 \frac{(-1)^{m_1}}{\pi^2 m_1} \left(\frac{1}{m_1 (x + \frac{1}{2}) - m_2} + \frac{1}{m_1 (x + \frac{1}{2}) + m_2} \right).$$

I denne Dobbeltsum blive ifølge Betingelsen for Summationen de Led at udtage, som svare til $m_1 (x + \frac{1}{2}) - m_2 = 0$, under hvilken Betingelse Summationen med Hensyn til m_2 let lader sig udføre. Saaledes reduceres ovenstaaende Dobbeltsum til

$$\frac{1}{\pi^2 (x + \frac{1}{2})} \sum_{m_1 = 1}^{m_1 = \infty} \frac{(-1)^{m_1}}{m_1^2} = - \frac{1}{12 (x + \frac{1}{2})},$$

saa at altsaa hele denne Dobbeltsum, naar de Led, som forsvinde for $x = \infty$, ikke medtages, bortfalder. Resultatet kan saaledes under samme Forudsætning udtrykkes ved

$$X_2^2 = \frac{u}{\pi\sqrt{2}} \Sigma\Sigma \frac{\sin\left(4\pi\,(m_1 m_2 u)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{(m_1 m_2 u)^{\frac{3}{4}}},$$

hvor den dobbelte Summation skal udføres paa den Maade, som ovenfor er angivet for de to ved S_1 og S_2 betegnede Summationer.

Det viser sig af det her fundne Resultat, at naar de Led bortkastes, som forsvinde for $u = \infty$, saa faa i det Integral, hvorved X_2^2 oprindelig var bestemt, kun de Elementer Betydning, som ligge i Nærheden af Minimalpunktet, og er først dette givet, kan Beregningen lettere udføres paa anden Maade. Er u_1 i Minimalpunktet betegnet med v_1, vil man have $v_1 = \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}}$, og Betingelsen for, at dette Punkt ligger indenfor Integralets Grænser, vil være $1 < v_1 < u$. Naar denne Betingelse er opfyldt, kan man udenfor Minimalpunktet sætte $u_1 = v_1(1+y)$, hvor y kan betragtes som saa lille, at man ved Udviklingen efter Potenser af y kan bortkaste de Led, som indeholde højere end anden Potens af y, hvorefter Integralet kan bestemmes ved Integration med Hensyn til y imellem de ubestemte Grænser $-\omega$ og $+\omega$ (nærmere defineret i min Afhandling Vid. Sels. Skr. 6 R., VI, 1 S. 13) eller, hvad der her bliver det samme, fra $-\infty$ til $+\infty$. Falder Minimalpunktet i en af Integralets Grænser, forandres den ene af disse Grænser for y til 0, og Resultatet maa da halveres, og falder det udenfor Integralets Grænser, bliver Resultatet 0. Paa denne Maade vil man erholde

$$X_2^2 = 2u\sqrt{\pi}\, \Sigma\Sigma \frac{\sin\left(2\sqrt{\mu_1\mu_2 u} + \frac{\pi}{4}\right)}{(\mu_1\mu_2 u)^{\frac{3}{4}}},$$

hvor Summationerne maa udføres saaledes, at man faar $1 < \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}} < u$, og at i Tilfælde af, at man netop har $1 = \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}}$ eller $\sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}} = u$, Summen regnes halvt.

Dette Resultat er netop det samme, som ovenfor er fundet, og da Rigtigheden af den sidste Fremgangsmaade saaledes er godtgjort, ville vi nu gjøre yderligere Anvendelse af den paa Beregningen af det almindelige Udtryk X_s^s.

Det i (17) givne Udtryk kan skrives under Formen

$$X_s^s = 2u\Sigma\Sigma \ldots \int_1^u \frac{du_1}{u_1} \ldots \int_1^{u_{s-1}} \frac{du_{s-1}}{u_{s-1}} \frac{1}{\mu_s u_{s-1}} \sin\left(\mu_s u_{s-1} \pm \mu_{s-1}\frac{u_{s-2}}{u_{s-1}} \ldots \pm \mu_1 \frac{u}{u_1}\right),$$

de dobbelte Fortegn forstaaede saaledes, at Summen tages af alle de Udtryk, som svare til de forskjellige Kombinationer af Fortegn. Nu vil imidlertid et Minimum eller Maximum kun være mulig, naar alle Fortegn ere positive, og det vil da være bestemt ved

$$\mu_s u_{s-1} = \mu_{s-1}\frac{u_{s-2}}{u_{s-1}} = \ldots \mu_1 \frac{u}{u_1} = \nu, \quad \text{idet } \nu = (\mu_s\mu_{s-1}\ldots\mu_1 u)^{\frac{1}{s}}.$$

Betingelsen for, at dette Punkt falder indenfor Integralets Grænser, vil være udtrykt ved

$$\mu_p < \nu, \quad \text{for } p = 1, 2, \ldots s.$$

Betegne vi nu de Variable $u_1, u_2, \ldots u_{s-1}$ i Minimalpunktet ved $v_1, v_2, \ldots v_{s-1}$, ville disse sidste være bestemte ved

$$v_1 = \frac{\mu_1 u}{\nu}, \quad v_2 = \frac{\mu_1\mu_2 u}{\nu^2}, \quad \ldots v_{s-1} = \frac{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{s-1}u}{\nu^{s-1}} = \frac{\nu}{\mu_s}.$$

Dernæst indføres de nye Variable $y_1, y_2, \ldots y_{s-1}$ ved Ligningerne

$$u_1 = v_1(1+(s-1)y_1), \quad u_2 = v_2(1+(s-2)(y_1+y_2)), \quad \ldots u_{s-1} = v_{s-1}(1+y_1+y_2+\ldots y_{s-1}).$$

Disse Variable kunne betragtes som saa smaa Størrelser, at de i Koefficienten til den trigonometriske Funktion kunne bortkastes, og at Udviklingen af Vinklen

$$\mu_s u_{s-1} + \mu_{s-1}\frac{u_{s-2}}{u_{s-1}} + \ldots \mu_1 \frac{u}{u_1}$$

efter Potenser af y_p kan standse med Leddene af anden Grad med Hensyn til y_p. Ved denne Udvikling forsvinde Koefficienterne saavel til y_p som til $y_p y_q$, naar p og q ere forskjellige, og Resultatet reduceres til

$$\nu s + \tfrac{1}{2}\nu\left(s(s-1)y_1^2 + (s-1)(s-2)y_2^2 + \ldots 2\cdot 1\, y_{s-1}^2\right).$$

Idet derefter Integrationerne med Hensyn til $y_1, y_2 \ldots y_{s-1}$ udstrækkes fra $-\infty$ til $+\infty$, vil man erholde

$$X_s^s = 2u[s-1]\,\Sigma\Sigma\ldots\frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_{s-1} \sin\left(\nu s + \tfrac{1}{2}\nu\left(s(s-1)y_1^2 + \ldots 2\cdot 1\, y_{s-1}^2\right)\right)$$

$$= \frac{2u}{\sqrt{s}}\,\Sigma\Sigma\ldots\frac{1}{\nu}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^{\frac{s-1}{2}} \sin\left(\nu s + (s-1)\tfrac{\pi}{4}\right).$$

Heri er $\nu = (\mu_1\mu_2\ldots\mu_s u)^{\frac{1}{s}} = 2\pi(m_1 m_2 \ldots m^s u)^{\frac{1}{s}}$, altsaa er

$$X_s^s = \frac{u}{\pi\sqrt{s}}\,\Sigma\Sigma\ldots\frac{\sin\left(2\pi s(m_1 m_2\ldots m_s u)^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4}\right)}{(m_1 m_2 \ldots m_s u)^{\frac{s+1}{2s}}}. \tag{24}$$

Ved denne s-dobbelte Summation varierer Produktet $m_1 m_2 \ldots m_s$ fra 1 til ∞, men enhver af de enkelte Faktorer maa ifølge Betingelserne $\mu_p < \nu$ ikke overskride Grænsen $(m_1 m_2 \ldots m_s u)^{\frac{1}{s}}$, og er netop denne Grænse naaet, hvilket svarer til Minimalpunktets Beliggenhed i en af de Variable u_p's Grænser, saa maa Resultatet regnes halvt.

Sættes $m_1 m_2 \ldots m_s = m$, kan den s-dobbelte Summation forandres til en enkelt med Hensyn til m fra $m = 1$ til $m = \infty$, naar Udtrykket multipliceres med en Faktor $\gamma_n^s(m)$, som angiver Antallet af de forskjellige Maader, hvorpaa m kan dannes af s Faktorer, heri medregnet Tallet 1, og under den Betingelse, at ingen af Faktorerne overskrider Grænsen $n = (mu)^{\frac{1}{s}}$. De Tilfælde, hvor netop denne Grænse er naaet, regnes halvt. Herved faar Ligningen (24) Formen

$$X_s^s = \frac{u}{\pi \sqrt{s}} \sum_{m=1}^{m=\infty} \gamma_n^s(m) \frac{\sin\left(2\pi s (mu)^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4}\right)}{(mu)^{\frac{s+1}{2s}}}, \quad n = (mu)^{\frac{1}{s}}. \tag{25}$$

Den her indførte, ovenfor definerede, Størrelse $\gamma_n^s(m)$ vil kunne bestemmes som Koefficienten til m^r i Udviklingen

$$\left(1 + 2^r + 3^r + \ldots (n-1)^r + \tfrac{1}{2} n^r\right)^s = 1 + \gamma_n^s(2)\, 2^r + \ldots \gamma_n^s(m)\, m^r + \ldots \tag{26}$$

Naar man nu indsætter den saaledes fundne Værdi af X_s^s for $B^s(x)$ i Rækken (10) for at erholde den hertil svarende periodiske Del af $\vartheta(x)$, saa vil man ved at udføre Regningen numerisk for en given stor Værdi af x og vilkaarligt valgte Værdier af m finde, at Leddene med voxende s efter først at have gjennemløbet en ganske uregelmæssig Vexlen af Fortegn efterhaanden samle sig i større og større Grupper med ensartede Fortegn, og at det bliver Summationen af disse Grupper, hvoraf Resultatet i det væsentlige kommer til at afhænge. Betingelsen for Dannelsen af en saadan Gruppe lader sig let paavise.

Der sættes

$$2s(mu)^{\frac{1}{s}} + \frac{s-1}{4} = \theta_s,$$

og det efterfølgende Led bestemmes ved Udviklingen

$$\theta_{s+1} = \theta_s + \frac{d\theta_s}{ds} \cdot \frac{1}{1} + \frac{d^2\theta_s}{ds^2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} + \ldots$$

Hvis nu $\frac{d^2\theta_s}{ds^2}$ og de følgende Differentialkoefficienter ere meget smaa Størrelser, og hvis $\frac{d\theta_s}{ds}$ er et ulige helt, positivt eller negativt, Tal, saa vil der i Rækken (10), hvor Leddene have vexlende Fortegn, omkring det til s svarende Led danne sig en af de omtalte Grupper.

Her er

$$\frac{d\theta_s}{ds} = 2(mu)^{\frac{1}{s}}\left(1 - \frac{\log mu}{s}\right) + \frac{1}{4}, \quad \frac{d^2\theta_s}{ds^2} = 2(mu)^{\frac{1}{s}}\frac{(\log mu)^2}{s^3}, \ldots$$

eller, naar man sætter $\frac{\log mu}{s} = y$,

$$\frac{d\theta_s}{ds} = 2e^y(1-y) + \tfrac{1}{4}, \quad \frac{d^2\theta_s}{ds^2} = 2e^y\frac{y^3}{\log mu}, \ldots .$$

Man skal altsaa have, naar p er et positivt eller negativt Tal eller 0,

$$\frac{d\theta_s}{ds} = 2e^y(1-y) + \tfrac{1}{4} = 1 - 2p.$$

Da y skal være positiv, ville negative Værdier af p ikke være mulige, og man vil finde

$$\begin{aligned} y &= 0{,}83774\ldots, & e^y &= 2{,}31114\ldots \text{ for } p = 0,\\ y &= 1{,}19011\ldots, & e^y &= 3{,}28746\ldots \text{ for } p = 1,\\ y &= 1{,}40051\ldots, & e^y &= 4{,}05727\ldots \text{ for } p = 2,\\ y &= 1{,}55459\ldots, & e^y &= 4{,}73317\ldots \text{ for } p = 3. \end{aligned}$$

Det vil dernæst ses, at i det mindste for de lavere Værdier af p ville $\frac{d^2\theta_s}{ds^2}$ og de følgende Differentialkoefficienter blive meget smaa, naar $\log mu$ er et meget stort Tal. Indenfor praktiske Grænser ($\log x < 21$) og for de lavere Værdier af m er denne Betingelse vel kun i ringe Grad sket Fyldest, men man vil dog altid, naar x kommer op i Millionernes Række, med Lethed kunne paavise de til de lavere Værdier af p svarende Gruppedannelser.

I disse Grupper vil altsaa indgaa

$$\sin\pi\theta_s = \sin\pi\left(\log mu \cdot \frac{2e^y + \frac{1}{4}}{y} - \frac{1}{4}\right),$$

eller naar vi give denne periodiske Funktion Formen

$$\sin\pi\theta_s = \sin 2\pi\left(\frac{\log u}{\lambda} + k_m\right), \tag{26}$$

vil λ være bestemt ved

$$\lambda = \frac{y}{e^y + \frac{1}{8}}. \tag{27}$$

Den til den saaledes betragtede Gruppe svarende Del af $\vartheta(x)$ vil altsaa, fremstillet ved en Kurve, hvor $\log u$ eller, hvad der her er det samme, $\log x$ tages som Abscisse, vise en konstant Afstand $\frac{1}{2}\lambda$ imellem to paa hinanden følgende Skjæringspunkter med Abscisseaxen.

Til de ovenfor angivne Værdier af y svarer henholdsvis

$$\lambda = 0{,}34388\ldots, \quad 0{,}34875\ldots, \quad 0{,}33487\ldots, \quad 0{,}31999\ldots .$$

Man vil imidlertid have bemærket, at det netop er de store Værdier af s, nemlig dem, som ligge i Nærheden af $\log mu$, som Dannelsen af disse store Perioder i $\vartheta(x)$ skyldes, men denne Omstændighed gjør det nødvendigt atter at komme tilbage til den Beregning, som førte os til Ligningen (25). Det vil da erindres, at vi havde udstrakt Variationen af de Variable y_p til begge Sider i det uendelige, hvad der kan forsvares, saasnart y_p blot overskrider visse snævre Grænser. Men naar selve Antallet s af Variable og Integraler bliver saa stort, at $u^{\frac{1}{s}}$ ikke længere kan betragtes som et stort Tal, hvilket netop her er Tilfældet, saa tør Variationen af y_p ikke udstrækkes saa vidt. Følgen heraf maa da blive, at θ_s nærmer sig, især for de laveste Værdier af p, stærkt til sin laveste Grænse, som er $2s(mu)^{\frac{1}{s}}$ plus en af s uafhængig Konstant. Gaa vi til selve denne Grænse, ville vi have

$$\frac{d\theta_s}{ds} = 2e^y(1-y) = 1-2p\,,$$

og de heraf beregnede Værdier af y ville være

$$\begin{aligned}
y &= 0{,}76803\ldots\,, & e^y &= 2{,}15553\ldots \text{ for } p = 0\,,\\
y &= 1{,}15718\ldots\,, & e^y &= 3{,}18097\ldots \text{ for } p = 1\,,\\
y &= 1{,}37809\ldots\,, & e^y &= 3{,}96731\ldots \text{ for } p = 2\,,\\
y &= 1{,}53736\ldots\,, & e^y &= 4{,}65232\ldots \text{ for } p = 3\,.
\end{aligned}$$

Perioden λ vil nu være at bestemme af

$$\lambda = ye^{-y}, \tag{28}$$

og til de beregnede Værdier af y vil svare henholdsvis

$$\lambda = 0{,}35631\ldots\,,\quad 0{,}36378\ldots\,,\quad 0{,}34736\ldots\,,\quad 0{,}33045\ldots\,.$$

De sande Værdier af λ ville altsaa ligge imellem disse og de ovenfor beregnede og for de laveste Værdier af p, hvortil de største Grupper svare, vistnok nærmest de sidste Tal. Iøvrigt ere Perioderne for de lavere Værdier af p saa lidt forskjellige, at de paa lange Strækninger ville forene sig til en enkelt Periode, som ikke bliver meget forskjellig fra 0,35.

Af Udtrykket (25) kan endvidere sluttes, at Koefficienterne til de periodiske trigonometriske Funktioner eller Amplituderne for de største Værdier af s og altsaa ogsaa af λ meget nær ere af samme Størrelsesorden som $x^{\frac{1}{2}}$, og af lavere Orden ved aftagende s og λ, altsaa for de kortere Perioder. En nærmere Bestemmelse af Amplitude og Fase for de forskellige Perioder turde imidlertid møde meget betydelige Vanskeligheder.

Det Resultat, som ovenstaaende Regning har ført mig til, kan i det væsentlige naaes ved en anden Fremgangsmaade, som jeg her skal meddele, da det forekommer mig, at der ved denne kastes et nyt Lys over Spørgsmaalet.

Der sættes

$$(1+2^r+3^r+\ldots)^s = 1+\gamma^{s(2)}\,2^r+\ldots\gamma^{s(x)}\,x^r+\ldots, \tag{29}$$

hvor $\gamma^{s(x)}$ bliver Antallet af Tilfælde, hvori x kan opløses i s Faktorer, heri medregnet 1, samt

$$G^s(x) = 1+\gamma^{s(2)}+\ldots\gamma^{s(x)}. \tag{30}$$

Man kan beregne $\gamma^{s(x)}$ af $\gamma^{s-1(x)}$ ved at summere alle de Tilfælde, som svare til den ny tilkommende Faktor, og erholder saaledes

$$\gamma^{s(x)} = \Sigma\gamma^{s-1\left(\frac{x}{d}\right)},$$

idet Summen udstrækkes til alle Divisorer d i x. Tillige er, med den Legendre'ske Betegnelse E for det største hele Tal i den efterfølgende Brøk,

$$\Sigma\gamma^{s-1\left(\frac{x}{d}\right)} = \sum_{q=1}^{q=x}\left(E\frac{x}{q}-E\frac{x-1}{q}\right)\gamma^{s-1(q)},$$

hvorved altsaa erholdes

$$\gamma^{s(x)} = \sum_{q=1}^{q=x}\left(E\frac{x}{q}-E\frac{x-1}{q}\right)\gamma^{s-1(q)}, \tag{31}$$

og heraf atter

$$G^s(x) = \sum_{q=1}^{q=x} E\frac{x}{q}\cdot\gamma^{s-1(q)}. \tag{32}$$

Disse Udtryk kunne bringes under analytisk Form ved Ligningerne

$$E\frac{x}{q}-E\frac{x-1}{q} = \sum_{m=1}^{m=q}\frac{\cos 2\pi\frac{mx}{q}}{q}, \tag{33}$$

$$E\frac{x}{q}+\frac{1}{2} = \sum_{m=1}^{m=q}\frac{\sin 2\pi\frac{m(x+\frac{1}{2})}{q}}{2q\sin\pi\frac{m}{q}}, \tag{34}$$

hvis Rigtighed let konstateres ved Udførelsen af Summationerne.

Vi ville nu nærmere undersøge $\gamma^{s(x)}$ under den saaledes fremkomne Form, nemlig

$$\gamma^{s(x)} = \sum_{q=1}^{q=x}\sum_{m=1}^{m=q}\frac{\cos 2\pi\frac{mx}{q}}{q}\gamma^{s-1(q)} = \sum_{m=1}^{m=x}\sum_{q=m}^{q=x}\frac{\cos 2\pi\frac{mx}{q}}{q}\gamma^{s-1(q)}. \tag{35}$$

I det sidste Udtryk sættes

$$q = q_1 q_2\ldots q_{s-1},$$

og Summationen med Hensyn til q forandres til en $(s-1)$ dobbelt Summation med Hensyn til $q_1, q_2, \ldots q_{s-1}$ paa en saadan Maade, at alle de Tilfælde, som tilfredsstille Betingelserne

$$m \overline{\overline{<}} q_1 q_2 \ldots q_{s-1} \overline{\overline{<}} x, \tag{36}$$

medtages. Idet paa denne Maade Faktoren $\gamma^{s-1}(q)$ bortfalder, erholdes

$$\gamma^s(x) = \sum_{m=1}^{m=x} \Sigma\Sigma \ldots \frac{\cos 2\pi \frac{mx}{q_1 q_2 \ldots q_{s-1}}}{q_1 q_2 \ldots q_{s-1}}, \tag{37}$$

hvor Summationstegnene $\Sigma\Sigma\ldots$ antyde den under de angivne Betingelser udførte Summation med Hensyn til de $s-1$ Variable $q_1, q_2, \ldots q_{s-1}$.

Vi ville da først betragte den enkelte Summation

$$\Sigma \frac{a_1}{q_1} \cos 2\pi \frac{a_1}{q_1},$$

hvor q_1 gjennemløber en stor, ikke nærmere bestemt, Række af paa hinanden følgende Tal, og hvor a_1 er et meget stort Tal. Det vil da bemærkes, at der ved enkelte Værdier af q_1, som vi ville betegne ved q_1', danner sig til begge Sider for det til q_1' svarende Led en Gruppe af Led med ens Fortegn. Betingelserne herfor ere følgende.

Man sætte $q_1 = q_1' + y_1$ og antage

$$\frac{a_1}{(q_1' + k_1)^2} = m_1,$$

idet k_1 er en ægte Brøk, m_1 et helt Tal. Man vil da kunne danne Udviklingen

$$\frac{a_1}{q_1} = \frac{a_1}{q_1' + k_1} - \frac{a_1(y_1 - k_1)}{(q_1' + k_1)^2} + \frac{a_1(y_1 - k_1)^2}{(q_1' + k_1)^3} - \ldots,$$

som ved delvis Elimination af k_1 og q_1' gaar over til

$$\frac{a_1}{q_1} = 2\sqrt{m_1 a_1} - m_1(y_1 + q_1') + \frac{m_1^{\frac{3}{2}}(y_1 - k_1)^2}{a_1^{\frac{1}{2}}} - \ldots.$$

Heri er $m_1(y_1 + q_1')$ et helt Tal, og er nu tillige m_1 meget lille i Sammenligning med $a_1^{\frac{1}{3}}$, ere Betingelserne for Dannelsen af den omtalte Gruppe opfyldte. Gaa vi til Grænsen $a_1 = \infty$ og antages m_1 endelig, kan den enkelte Gruppes Led summeres med fuld Nøjagtighed ved at forandre Summationen til Integration med Hensyn til y_1 imellem Grænserne $-\infty$ og $+\infty$, forudsat dog at Gruppen ikke netop er en Grænsegruppe, som afbrydes af en given Grænse for q_1. Resultatet af denne Integration bliver

$$\frac{a_1}{\sqrt{2}} \frac{\cos\left(2\pi \,.\, 2(m_1 a_1)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{(m_1 a_1)^{\frac{1}{4}}}.$$

Ogsaa naar a_1 er endelig, men meget stor, medens m_1 hører til de lavere Tal i Talrækken, vil Gruppedannelsen finde Sted, og Summen af en Gruppes Led maa meget nær blive den samme som ovenfor er fundet. Men efterhaanden som m_1 i Størrelse nærmer sig til $a_1^{\frac{1}{3}}$, ville Gruppens Led aftage i Antal og Udtrykket for deres Sum tabe i

Nøjagtighed, hvorefter Gruppedannelsen fuldstændig ophører. Men naar derefter m_1 voxer yderligere udover Grænsen $a_1^{\frac{1}{3}}$, saa kan omvendt ethvert Led med den Variable q_1 betragtes som fremkommet ved Summationen af en Gruppe Led med m_1 som Variabel, i hvilken Gruppe hvert Led netop faar samme Form, som ovenfor er angivet. Om Rigtigheden heraf vil man ved en til den ovenfor udførte tilsvarende Regning let kunne overbevise sig. Hvis man altsaa kan se bort fra de Led, hvor m_1 (ligesom ogsaa q_1) er i Nærheden af $a_1^{\frac{1}{3}}$, saa kan den angivne Omdannelse af Summationen med q_1 som Variabel til en Summation med m_1 som Variabel betragtes som almindelig gjældende for alle q_1.

Med denne Indskrænkning med Hensyn til den neutrale Zone, hvor ingen Gruppedannelse finder Sted paa nogen af Siderne, vil man altsaa kunne sætte

$$\Sigma \frac{a_1}{q_1} \cos 2\pi \frac{a_1}{q_1} = \Sigma \frac{a_1}{\sqrt{2}} \frac{\cos\left(2\pi \,.\, 2(m_1 a_1)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{(m_1 a_1)^{\frac{1}{4}}}, \tag{38}$$

hvor Grænserne i de to Summer kunne udledes af Relationerne imellem de to Variable q_1 og m_1.

Dernæst sættes heri $a_1 = \frac{a_2}{q_2}$, og en Summation tænkes udført paa begge Sider med Hensyn til q_2, som antages at gjennemløbe en Række paa hinanden følgende Tal. Der sættes nu paa højre Side $q_2 = q_2' + y_2$ og

$$\frac{(m_1 a_2)^{\frac{1}{2}}}{(q_2' + k_2)^{\frac{3}{2}}} = m_2 ,$$

hvor k_2 er en ægte Brøk, m_2 et helt Tal. Man vil da paa lignende Maade som før kunne danne Udviklingen

$$2\left(\frac{m_1 a_1}{q_2}\right)^{\frac{1}{2}} = 3(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}} - m_2(y_2 + q_2') + \frac{3}{4} \frac{m_2^2}{(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}}} (y_2 - k_2)^2 - \dots .$$

Heri er $m_2(y_2 + q_2')$ et helt Tal, og der vil altsaa danne sig en Gruppe omkring det til q_2' svarende Led, naar m_2^2 er tilstrækkelig lille i Sammenligning med $(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}}$, altsaa m_2 lille imod $(m_1 a_2)^{\frac{1}{5}}$. Idet Gruppens Led summeres paa samme Maade som før, erholdes

$$\Sigma\Sigma \frac{a_2}{q_1 q_2} \cos 2\pi \frac{a_2}{q_1 q_2} = \Sigma\Sigma \frac{a_2}{\sqrt{3}} \frac{\cos\left(2\pi \,.\, 3(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}} + 2\frac{\pi}{4}\right)}{(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}}},$$

hvilken Ligning, paa samme Maade som Ligningen (38), ogsaa kan udstrækkes til at gjælde for meget høje Værdier af m_2, medens den derimod ophører at være gyldig, naar m_2 (og q_2) er i Nærheden af $(m_1 a_2)^{\frac{1}{5}}$.

Man vil saaledes paa denne Maade uden Vanskelighed komme til den under samme Indskrænkninger gjældende almindelige Formel

$$\Sigma\Sigma\ldots\frac{1}{q_1q_2\cdots q_p}\cos 2\pi\frac{a_p}{q_1q_2\cdots q_p}=\Sigma\Sigma\ldots\frac{1}{\sqrt{p+1}}\frac{\cos\left(2\pi(p+1)(m_1\ldots m_2m_pa_p)^{\frac{1}{p+1}}+p\frac{\pi}{4}\right)}{(m_1m_2\ldots m_pa_p)^{\frac{p}{2p+2}}}. \quad (39)$$

Forbindelsen imellem de to Sæt af Variable kan tilnærmelsesvis udtrykkes ved

$$\frac{a_1}{q_1^2}=m_1\,,\quad \frac{(m_1a_2)^{\frac{1}{2}}}{q_2^{\frac{3}{2}}}=m_2\,,\quad \frac{(m_1m_2a_3)^{\frac{1}{3}}}{q_3^{\frac{4}{3}}}=m_3\,,\quad \ldots,$$

hvor
$$a_1=\frac{a_2}{q_2},\quad a_2=\frac{a_3}{q_3},\quad \ldots.$$

Heraf udledes de approximerede Ligninger

$$m_1q_1=m_2q_2=\ldots=m_pq_p=(m_1m_2\ldots m_pa_p)^{\frac{1}{p+1}}. \quad (40)$$

Vil man gjøre en Anvendelse heraf paa de i (37) forekommende Summationer, har man kun at sætte $p=s-1$ og $a_{s-1}=mx$, men det maa herved bemærkes, at man paa denne Maade kun ufuldstændig gjengiver det hele Udtryk for $\gamma^{s(x)}$, dels paa Grund af Unøjagtigheden i de Zoner, hvor Gruppedannelserne høre op samtidig paa begge Sider, dels ogsaa paa Grund af Grænsebestemmelserne for de Variable. Hvad det imidlertid her kommer an paa, er at udtage af Udviklingen for $\gamma^{s}(x)$ netop de Led, hvoraf Dannelsen af de lange Perioder i Primtalrækken afhænger, og i denne Henseende kommer det fornemmelig an paa Bestemmelsen af de lavere Grænser for de nye Variable m_1, m_2, ...

Det fremgaar af Ligningen (40), naar heri sættes $p=s-1$ og $a_{s-1}=mx$, at man tilnærmelsesvis har

$$q_1q_2\cdots q_{s-1}=\frac{mx}{(mm_1\ldots m_{s-1}x)^{\frac{1}{s}}},$$

og ifølge (36) er den øvre Grænse for dette Produkt x. Alle de Variable m_1, ... m_{s-1} have altsaa 1 som lavere Grænse, saalænge m ogsaa er lille og navnlig ikke overskrider Grænsen $x^{\frac{1}{s-1}}$.

Vi kunne altsaa af Udtrykket (37) for $\gamma^{s}(x)$ udtage en Række af Led, som kunne omdannes til den s-dobbelte Sum

$$\Sigma\Sigma\ldots\frac{1}{\sqrt{s}}\frac{\cos\left(2\pi\,.\,s(mm_1\ldots m_{s-1}x)^{\frac{1}{s}}+(s-1)\frac{\pi}{4}\right)}{(mm_1\ldots m_{s-1}x)^{\frac{s-1}{2s}}}, \quad (42)$$

hvor alle de Variable $m_1m_2\ldots m_{s-1}$ gjennemløbe Talrækken fra 1 indtil visse Grænser, som vi holde ubestemte.

Ville vi dernæst finde den tilsvarende Række for $G^s(x)$, kunne vi først sætte

$$G^s(x) = \sum_{x'=x_0}^{x'=x} \gamma^{s(x')} + G^s(x_0 - 1),$$

og idet saavel x_0 som x betragtes som meget høje Tal, kan, naar her for $\gamma^{s(x')}$ indsættes Udviklingen (42), Summationen med Hensyn til x' forandres til Integration, og denne kan, under Hensyn til at alle de Værdier, som den Variable x' gjennemløber, ere store Tal, let udføres approximativt. Den saaledes udtagne, af x afhængige, Del af $G^s(x)$ bliver

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\pi \sqrt{s}} \Sigma \Sigma \ldots \frac{\sin\left(2\pi \, . \, s(m m_1 \ldots m_{s-1} x)^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4}\right)}{(m m_1 \ldots m_{s-1} x)^{\frac{s+1}{2s}}}. \tag{43}$$

Dette Udtryk er i Formen, paa Faktoren $\frac{1}{2}$ nær, ganske det samme, som det vi i Ligning (24) havde fundet for X_s^s. I begge Tilfælde er den lavere Grænse 1 for alle s Variable, men hermed ophører ogsaa Ligheden, ligesom ogsaa de to Udviklinger repræsentere to forskjellige, om end nær beslægtede, periodiske Funktioner.

Da man, tilsvarende Rækken (9), har

$$A^s(x) = G^s(x) - \frac{s}{1} G^{s-1}(x) + \frac{s(s-1)}{1 \, . \, 2} G^{s-2}(x) - \ldots + (-1)^s,$$

vil man ogsaa let kunne danne en med (10) analog Udvikling for $\vartheta(x)$ af Formen

$$\vartheta(x) = -b_0 + b_1 \frac{G^1(x)}{1} - b_2 \frac{G^2(x)}{2} + \ldots \pm b_{s_1} \frac{G^{s_1}(x)}{s_1}, \quad s_1 > \frac{\log x}{\log 2} - 1.$$

Indsættes heri det ved (43) givne Udtryk for $G^s(x)$, vil man altsaa erholde den tilsvarende periodiske Del af $\vartheta(x)$. Som det let ses, bliver den videre Diskussion heraf i Hovedsagen den samme som tidligere, og Resultatet bliver ligeledes Konstateringen af de store Perioder med $\log x$ som Variabel og Perioden λ, saaledes som denne er bestemt ved Ligningen (27). Men med Hensyn til den nærmere Bestemmelse af de periodiske Funktioners Amplituder og Faser møder der os ogsaa her de samme Vanskeligheder, skjøndt under en anden Form.

Det er allerede i Indledningen omtalt, at de virkelig fundne Primtalmængders periodiske Afvigelser fra de efter Riemann's Formel beregnede Værdier efterhaanden for de højere Tals Vedkommende synes at udvikle sig til mere og mere regelmæssige Perioder. Det træffer sig saa heldig, at Dr. Gram allerede i sin, i Indledningen citerede, Afhandling har taget dette Spørgsmaal, set fra det empiriske Standpunkt, under Behandling og herom udtalt sig paa følgende Maade (S. 250):

«Glaisher har for at anskueliggjøre, hvorledes Afvigelserne variere, fremstillet dem grafisk i et Diagram, der er vedføjet den nævnte Afhandling. Der er noget i dette, som kunde tyde paa en Periode afhængig af ln, saaledes at Periodetallet, naar $\log_{10} n$ toges til Argument, omtrent kunde blive 0·17 (for ln altsaa 0·39).»

Ved mundtlig Meddelelse har Dr. Gram sat mig i Stand til at supplere denne Angivelse. Gives den periodiske Funktion Formen

$$\sin 2\pi\left(\frac{\log x}{\lambda} + C\right),$$

fandtes Konstanterne af Gram ved en raa geometrisk Udjevning af Diagrammet bestemte ved

$$\lambda = 0{,}39\,, \qquad C = 0{,}34\,.$$

Rigtignok førte denne Formel til betydelige Afvigelser fra Diagrammet for den 9de Million, men disse bleve ikke medtagne, fordi Gram formodede, at de for en Del maatte stamme fra Fejl i de af Dase beregnede Primtalstavler, idet Resultatet af Optællingerne vanskelig syntes at kunne forliges med Meissels Beregning af Primtalmængden op til 10 Millioner. Derimod udviste Formlen en stor Overensstemmelse med Diagrammet fra 3 indtil 8 Millioner.

Sluttelig kom imidlertid Dr. Gram, saaledes som det ses af hans Afhandling sammesteds, efter at have beregnet Afvigelserne fra Riemann's Formel for Rækken af Primtal, svarende til $\log x$ med Intervallet 0,1, opad indtil $\log x = 15$ ($x = 3\,269\,017$), til det Resultat: «at den i Glaisher's Diagram tilsyneladende regelmæssige Fordeling af de store Maxima og Minima vistnok skyldes en Tilfældighed».

Saalænge Forsøget paa at bestemme Perioderne maatte være saa famlende, som det efter de forholdsvis faa Data, hvoraf endog en Del maatte formodes at være urigtige, nødvendigvis maatte blive, kunde det ogsaa være korrekt at tage det Parti, at opgive det. Men heldigvis har Gram alligevel meddelt Resultaterne af sine Udjevningsforsøg, thi det viser sig nu i Theoriens Belysning, at baade hans Formodning om, at $\log x$ maatte tages som Argument, og at Periodetallet var 0,39, har i Hovedsagen været rigtig, ligesom ogsaa en yderligere Diskussion af det Erfaringsmateriale, hvortil vi endnu ere indskrænkede, bliver ganske unødvendig. Selve den Omstændighed, at de regelmæssige lange Perioder udviskes, naar x kommer under en vis lavere Grænse, bliver en Stadfæstelse af Theorien.

Med det vundne theoretiske Grundlag vil der herefter være en stærk Opfordring til at gaa videre i den exakte Bestemmelse af Primtalmængderne. Navnlig vilde det være i høj Grad af Interesse at faa kontrolleret Dases Beregning af Primtalmængden indtil 9 Millioner ved Meissel's eller en lignende Methode, og derefter at faa bestemt en Række Punkter imellem 10 og 100 Millioner, f. Ex. for hver 10 Millioner. Der vilde da være tilvejebragt et fortrinligt Materiale til Støtte for fortsatte theoretiske Undersøgelser.